

## РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ СТАТИСТИКЕ

24. - 25. март 2023. године

### ОПШТЕ ИНФОРМАЦИЈЕ И УПУТСТВО ЗА РАД

- Укупан број такмичарских задатака је 10. Број поена означен је након редног броја питања и на крају задатка. Максималан број поена је 100.
- Време израде задатака је три сата.
- Задатке је потребно урадити хемијском оловком, изузев графичких приказа који се могу цртати графитном оловком.
- Све резултате и међурезултате обавезно заокругљивати на **две децимале**, осим логаритама које треба заокруглити на **5 децималних места**.
- Код питања са понуђеним одговорима увек је само један одговор тачан.
- При изради задатака дозвољено је користити дигитрон.

### ТАКМИЧАРСКИ ЗАДАЦИ

1. (3) Збир одступања емпиријских података временске серије од оцењених вредности линеарног тренда:
  - а. зависи од података којима располажемо;
  - б. једнак је нули;
  - в. зависи од вредности коефицијената у моделу линеарног тренда;
  - г. може узети само позитивне вредности, јер временска серија може имати само позитивне вредности;
  - д. ништа од наведеног, већ \_\_\_\_\_.
2. (3) Геометријска средина:
  - а. може се израчунати чак и уколико серија података садржи негативне вредности;
  - б. бољи је показатељ од хармонијске средине ако серија има екстремне вредности;
  - в. увек је већа од аритметичке средине;
  - г. за разлику од аритметичке средине, може бити већа и од максималне вредности у серији података;
  - д. ништа од наведеног, већ \_\_\_\_\_.

3. (3) У серији са интервално груписаним подацима, интервал варијације:
- уек представља разлику између доње границе последњег групног интервала и горње границе првог интервала;
  - може се израчунати уек, осим ако је први и последњи групни интервал отворен;
  - зависи од тога да ли је екстремна вредност у првом, или у последњем групном интервалу;
  - не може се одредити;
  - ништа од наведеног.
4. (5) Наведите шта је у следећим реченицама обележје, која је врста обележја, шта су јединице посматрања и која је врста статистичке серије (временска или структурна):
- Број продатих аутомобила марке Ауди у 40 продајних салона у 2022. години.
  - НБА играчи који су остварили више од 30 поена по утакмици у сезони 2021/2022.
  - Динамика пословног прихода предузећа у периоду од 2012. до 2021. године.
  - Месечни рачуни за електричну енергију породице у току 2022. године.
  - Дестинације представљене на Сајму туризма у фебруару 2023. године.

(За сваку наведену реченицу одговоре упишите у одговарајућа празна поља табеле.)

	Обележје	Врста обележја	Јединице посматрања	Врста статистичке серије
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

5. (5) Који од следећих исказа су тачни (Т), а који нетачни (Н)? Заокружите одговарајуће слово после сваког исказа.
- Када се применом формуле одреди модус интервално груписаних података, то не мора да значи да и серија оригиналних (негруписаних) података има модус. **Т Н**
  - У следећој серији података о марки продатих патика: Adidas, Asics, Converse, Lotto, Mizuno, New Balance, Nike, Puma, Reebok, медијана је марка Mizuno. **Т Н**
  - Структура више садржински повезаних основних скупова (или узорака) по једном истом обележју може се приказати помоћу комбиноване табеле. **Т Н**
  - Геометријска стопа раста показује за колико се ниво појаве у релативном износу повећао или смањено у текућем у односу на базни период посматрања. **Т Н**
  - Мере дисперзије се не могу одредити за атрибутивна обележја чији се модалитети могу рангирати. **Т Н**

6. У једној студији представљени су резултати оцењивања модела линеарног тренда вредности производње једног производа за период 2014-2022. године. Познато је да се вредност производње у посматраном периоду повећавала у просеку годишње за 10.000 долара, а да је укупна вредност производње тог производа у истом периоду износила 9 милиона долара.

- а) Оцењени коефицијенти модела линеарног тренда износе \_\_\_\_\_ (приказати поступак израчунавања). (4)
- б) Модел линеарног тренда оцењен у студији гласи \_\_\_\_\_. (1)
- в) Екстраполацијом тренда спроведите прогнозу вредности производње за 2025. годину и протумачите добијени резултат. (3)

7. Према подацима са шпанског сајта [www.aemet.es/es/serviciosclimaticos](http://www.aemet.es/es/serviciosclimaticos), у Шпанији следећи градови имају највећи број сунчаних сати годишње:

Севиља	Хуелва	Мурсија	Кадиз	Кордоба	Касерес	Бадахоз	Аликанте
2.921	2.970	2.967	3.024	2.905	2.922	2.860	2.851

- а) Највеће релативно одступање броја сунчаних сати годишње је између града \_\_\_\_\_ и града \_\_\_\_\_; то одступање износи \_\_\_\_\_ (уписати јединицу мере). *Напомена: за базни ниво узети мању вредност посматране појаве!* (2)
  - б) У ком граду је број сунчаних сати најближи просечном броју сунчаних сати наведених осам градова и колико износи то процентуално одступање? (4)
  - в) За колико број сунчаних сати у посматраним градовима у просеку одступа од просечног броја сунчаних сати тих градова, у апсолутном и релативном износу? Протумачите добијене резултате. (5)
8. У основном скупу агенција за доставу хране анализиран је обим промета (изражен бројем поруџбина у једном дану) и установљено је да су агенције имале максимално 60 поруџбина дневно. Процентуална структура промета је следећа: од укупног броја агенција за доставу хране, 12% њих остварило је 11-20 поруџбина, у 1/4 агенција остварено је мање од 31 поруџбине, у 45% агенција мање од 41 поруџбине, док је 2/3 њих остварило мање од 51 поруџбине.

- а) Дате податке прикажите табеларно. (3)
- б) У табели формирајте расподелу релативних фреквенција. (5)
- в) Израчунајте просечан број поруџбина у скупу посматраних агенција. (8)
- г) Графичким путем приближно одредите вредност медијане. (8)
- д) Графички приказ коришћен у делу задатка под г) назива се \_\_\_\_\_. (1)
- ђ) Модални интервал поруџбина је \_\_\_\_\_. (1)

9. У следећој табели дати су подаци о потрошњи производа у случајном узорку од 9 породица и њихова расположива средства:

Расположива средства (у хиљадама динара)	110	150	200	250	120	75	80	99	100
Потрошња (у стотинама динара)	220	260	260	380	250	150	150	120	260

- а) Израчунајте коефицијент просте линеарне корелације између посматране две променљиве и протумачите резултат. **(10)**
- б) Корелационом анализом је додатно обухваћена и цена производа (у динарима). Приликом израчунавања коефицијента просте линеарне корелације између потрошње и цене, добијени су следећи међурезултати: просечна цена производа у посматраном узорку износи 247 динара, збир квадрата вредности те променљиве је 558.591 динара<sup>2</sup>, а збир производа цене и потрошње 499.910 одговарајућих мерних јединица. Колико износи коефицијент просте линеарне корелације између цене и потрошње? Протумачите добијени резултат. **(6)**

10. На основу података о цени и обиму увоза три врсте воћа (А, Б и В) у 2015. и 2022. години, методом агрегата конструисани су групни индекси цена, физичког обима увоза и вредности увоза користећи пондере из базног периода. На основу њих је закључено да су увозне цене све три врсте воћа повећане за 20%, физички обим увоза смањен за 7%, а вредност увоза повећана за 11%. Познато је да је вредност увоза по врстама воћа у 2015. години износила редом 90 хиљада долара, 6.900 хиљада долара и 2.800 хиљада долара, док је обим увоза у истој години износио редом 80 тона, 11.000 тона и 5.700 тона.

- а) Колико износе конструисани групни индекси са пондерима из базног периода? **(1)**
- б) Колико износи укупна вредност увоза све три врсте воћа у 2022. години? **(3)**
- в) Која врста воћа је имала највећу, а која најмању увозну цену у 2015. години и колико су оне износиле? **(3)**
- г) Конструишите групне индексе цена и физичког обима увоза по методу агрегата користећи пондере из текућег периода. **(9)**
- д) Колико износе групни индекси цена и физичког обима увоза по методу средњих вредности (пондер: вредност из базног периода)? Упоредите добијене индексе са индексима цена и физичког обима увоза из дела задатка под а) и образложите закључак. **(4)**

**РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ СТАТИСТИКЕ**

**24. - 25. март 2023. године**

**РЕШЕЊА ЗАДАТАКА**

1. Тачан одговор:  
**б. једнак је нули.** (3 поена)
2. Тачан одговор:  
**д. ништа од наведеног, већ је геометријска средина увек мања или највише једнака аритметичкој средини.** (3 поена)
3. Тачан одговор:  
**г. не може се одредити.** (3 поена)
4. Тачни одговори:

	Обележје	Врста обележја	Јединице посматрања	Врста статистичке серије
1.	Број продатих аутомобила марке Ауди	Нумеричко прекидно	Продајни салони	Структурна
2.	-	-	НБА играчи који су остварили више од 30 поена по утакмици у сезони 2021/2022.	-
3.	Пословни приход	Нумеричко непрекидно	Предузеће	Временска
4.	Месечни рачун за електричну енергију	Нумеричко непрекидно	Породица	Временска
5.	-	-	Дестинације представљене на Сајму туризма у фебруару 2023. године.	-

**Сваки тачан одговор носи по 0,25 поена, што у збиру даје 5 поена.**

5. Тачни одговори: Т, Н, Н, Н, Т.

Сваки тачан одговор носи по 1 поен, што у збиру даје 5 поена.

6.

а) За период 2014-2022. године  $t = 1, 2, \dots, 9$ .

Оцењени коефицијент нагиба:  $\hat{b}=10.000$ .

Укупна вредност производње у периоду 2014-2022.:  $\sum Y_t = 9.000.000$ .

Година	2014.	2015.	2016.	2017.	2018.	2019.	2020.	2021.	2022.	$\Sigma$
$t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	45

$$\bar{t} = \frac{\sum t}{T} = \frac{45}{9} = 5 \quad \bar{Y} = \frac{\sum Y_t}{T} = \frac{9.000.000}{9} = 1.000.000 \quad (2 \text{ поена})$$

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b} \cdot \bar{t} = 1.000.000 - 10.000 \cdot 5 = 950.000 \quad (1 \text{ поен})$$

Оцењени коефицијенти модела линеарног тренда износе:  $\hat{a} = 950.000$  долара и  $\hat{b}=10.000$  долара. (1 поен)

б) Оцењени модел линеарног тренда:  $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b} \cdot t = 950.000 + 10.000 \cdot t$ . (1 поен)

в) У 2025. години  $t=12$ .

Прогнозирана вредност производње за 2025. годину:

$$\hat{Y}_{2025} = \hat{a} + \hat{b} \cdot t = 950.000 + 10.000 \cdot 12 = 1.070.000 \text{ долара.} \quad (2 \text{ поена})$$

Под претпоставком да ће исти фактори, који су на вредност производње деловали у посматраном периоду 2014-2022. године, деловати и у будућем периоду (приближно истом јачином, у истом смеру и без значајног утицаја нових фактора), вредност производње у 2025. години износиће 1.070.000 долара. (1 поен)

7.

а) Највеће релативно одступање броја сунчаних сати годишње је између града Кадиз и града Аликанте, и оно износи **6,07%** (индекс структуре:  $I = \frac{3.024}{2.851} \cdot 100 = 106,07$ ). (2 поена)

б) Просечан број сунчаних сати у посматраним градовима:

$$\mu = \frac{23.420}{8} = 2.927,50 \text{ сати годишње} \quad (1 \text{ поен})$$

Град	Број сунчаних сати годишње	Индекс структуре (просечан број сунчаних сати = 100)
Севиља	2921	99,78
Хуелва	2970	101,45
Мурсија	2967	101,35
Кадиз	3024	103,30
Кордоба	2905	99,23
Касерес	<u>2922</u>	<u>99,81</u>
Бадахос	2860	97,69
Аликанте	2851	97,39
<b>Просек</b>	<b>2.927,50</b>	<b>100,00</b>

Тачно израчунат индекс структуре за сваки град бодује се са 0,25 поена, што у збиру износи 2 поена.

Годишњи број сунчаних сати у Касересу најближи је просечном броју сунчаних сати посматраних градова (мањи је од просека за 0,19%; индекс структуре износи:

$$I = \frac{2.922}{2.927,50} \cdot 100 = 99,81 \quad (1 \text{ поен})$$

в) Стандардна девијација:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x-\mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{23.666,00}{8}} = 54,39 \text{ сати} \quad (2 \text{ поена})$$

Релативна мера дисперзије - коефицијент варијације:

$$V = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100 = \frac{54,39}{2.927,50} \cdot 100 = 1,86\% \quad (1 \text{ поена})$$

Број сунчаних сати у посматраним градовима у просеку одступа од просечног броја сунчаних сати тих градова за 54,39 сати, односно за 1,86% вредности аритметичке средине (просечног броја сунчаних сати). (2 поена)

8.

а) Расподела кумулативних релативних фреквенција

Број поруџбина	Кумулативна релативна фреквенција
11-20	0,12
21-30	0,25
31-40	0,45
41-50	0,67
51-60	1,00

(3 поена)

б)

Расподела релативних фреквенција

Број поруџбина	Релативна фреквенција
11-20	0,12
21-30	0,13
31-40	0,20
41-50	0,22
51-60	0,33
<b>Укупно</b>	<b>1,00</b>

(5 поена)

в) Просечан број поруџбина у скупу посматраних агенција:

$$\mu = \frac{\sum x' \cdot f}{N} = \frac{\sum x' \cdot f}{\sum f} = \sum x' \cdot \frac{f}{\sum f}$$

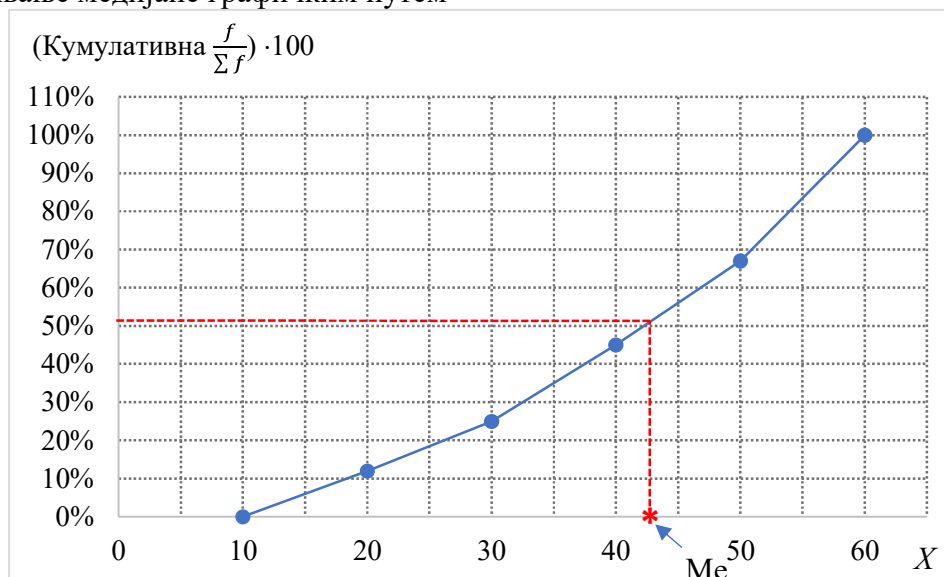
(3 поена)

Број поруџбина (x)	Релативна фреквенција ( $\frac{f}{\sum f}$ )	Средина групног интервала (x')	$x' \cdot \frac{f}{\sum f}$
11-20	0,12	15,5	1,86
21-30	0,13	25,5	3,32
31-40	0,20	35,5	7,10
41-50	0,22	45,5	10,01
51-60	0,33	55,5	18,32
<b>Укупно</b>	<b>1,00</b>		<b>40,61</b>

За тачно израчунате средине групних интервала добија се **1,5 поена** (0,3 поена · 5 интервала), за тачно израчунате производе  $x' \cdot \frac{f}{\sum f}$  добија се **2,5 поена** (0,5 поена · 5 интервала).

У основном скупу агенција за доставу хране просечно је  $\mu = 40,61$  поруџбина. (1 поен)

г) Одређивање медијане графичким путем



Медијана износи приближно 43 поруџбине.

За тачно нацртан графикон добија се **5 поена**, за одређивање медијане добија се **3 поена**.



д) Графички приказ коришћен у делу задатка под г) назива се **кумуланта**. (1 поен)

ђ) Модални интервал је од 51 до 60 поруџбина: највећи проценат агенција (њих 33%) има поруџбине у том интервалу. (1 поен)

9. а)

$x$	$y$	$x^2$	$y^2$	$x \cdot y$
110	220	12.100	48.400	24.200
150	260	22.500	67.600	39.000
200	260	40.000	67.600	52.000
250	380	62.500	144.400	95.000
120	250	14.400	62.500	30.000
75	150	5.625	22.500	11.250
80	150	6.400	22.500	12.000
99	120	9.801	14.400	11.880
100	260	10.000	67.600	26.000
<b>1.184</b>	<b>2.050</b>	<b>183.326</b>	<b>517.500</b>	<b>301.330</b>

$$\bar{x} = \frac{1.184}{9} = 131,56 \quad \bar{y} = \frac{2.050}{9} = 227,78.$$

Тачно израчунате суме квадрата, сума производа и аритметичке средине, бодују се са по 1 поеном. (5 поена)

Коефицијент прости линеарне корелације:

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{(\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2) \cdot (\frac{\sum y^2}{n} - \bar{y}^2)}} = \frac{\frac{301.330}{9} - 131,56 \cdot 227,78}{\sqrt{(\frac{183.326}{9} - 131,56^2) \cdot (\frac{517.500}{9} - 227,78^2)}} = 0,85$$

(4 поена)

Између потрошње и расположивих средстава у посматраном узорку породица постоји висока позитивна линеарна корелациона веза. (1 поен)

б)  $X_2$  – цена производа

$$\bar{x}_2 = 247; \quad \sum x_2 y = 499.910; \quad \sum x_2^2 = 558.591; \quad \sum y^2 = 517.500; \quad \bar{y} = 227,78.$$

(1 поен)

$$r = \frac{\frac{\sum x_2 y}{n} - \bar{x}_2 \cdot \bar{y}}{\sqrt{(\frac{\sum x_2^2}{n} - \bar{x}_2^2) \cdot (\frac{\sum y^2}{n} - \bar{y}^2)}} = \frac{\frac{499.910}{9} - 247 \cdot 227,78}{\sqrt{(\frac{558.591}{9} - 247^2) \cdot (\frac{517.500}{9} - 227,78^2)}} = -0,29$$

(4 поена)

Између потрошње и цене производа у посматраном узорку постоји слаба негативна линеарна корелациона веза. (1 поен)

10.

а) Групни индекси по методу агрегата са пондерима из базног периода:

$$I_p = \frac{\sum p_t q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot 100 = 120; \quad I_q = \frac{\sum q_t p_0}{\sum q_0 p_0} \cdot 100 = 93; \quad I_{pq} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_0} \cdot 100 = 111 \quad (1 \text{ поен})$$

б)

Врста воћа	Вредност увоза у 2015., у хиљадама долара ( $q_0 p_0$ )
А	90
Б	6.900
В	2.800
<b>Укупно</b>	<b>9.790</b>

На основу  $I_{pq} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_0} \cdot 100 = 111$  следи:  $\sum p_t q_t = \frac{I_{pq} \cdot \sum p_0 q_0}{100} = \frac{111 \cdot 9.790}{100} = 10.866,90$  (2 поена)

Укупна вредност увоза све три врсте воћа у 2022. години износи 10.866,90 хиљада долара (или 10.866.900 долара). (1 поен)

в)

Врста воћа	Вредност увоза у 2015., у хиљадама долара ( $p_0 q_0$ )	Физички обим увоза у 2015., у тонама ( $q_0$ )	Увозна цена у 2015., у хиљадама долара ( $p_0 = p_0 q_0 / q_0$ )
А	90	80	1,13
Б	6.900	11.000	0,63
В	2.800	5.700	0,49
<b>Укупно</b>	<b>9.790</b>		

У 2015. години највећа је увозна цена воћа А и износила је 1,13 хиљада долара, а најмања увозна цена воћа В у износу од 0,49 хиљада долара (или 490 долара). (3 поена)

г)

$$\sum p_0 q_0 = 9.790 \quad \sum p_t q_t = \frac{I_{pq} \cdot \sum p_0 q_0}{100} = \frac{111 \cdot 9.790}{100} = 10.866,90$$

$$I_p = \frac{\sum p_t q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot 100 = 120 \rightarrow \sum p_t q_0 = \frac{I_p \cdot \sum p_0 q_0}{100} = \frac{120 \cdot 9.790}{100} = 11.748,00 \quad (3 \text{ поена})$$

$$I_q = \frac{\sum q_t p_0}{\sum q_0 p_0} \cdot 100 = 93 \rightarrow \sum q_t p_0 = \frac{I_q \cdot \sum p_0 q_0}{100} = \frac{93 \cdot 9.790}{100} = 9.104,70 \quad (3 \text{ поена})$$

Групни индекси цена и физичког обима увоза по методу агрегата користећи пондере из текућег периода:

$$I_p = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_t} \cdot 100 = \frac{10.866,90}{9.104,70} \cdot 100 = 119,35;$$

$$I_q = \frac{\sum q_t p_t}{\sum q_0 p_t} \cdot 100 = \frac{10.866,90}{11.748,00} \cdot 100 = 92,50$$

**(2 поена)**

Увозне цене све три врсте воћа у 2022. години повећане су за 19,35% у односу на 2015., док је физички обим увоза у истом периоду смањен за 7,5%.

**(1 поен)**

д)

$$\bar{I}_p = \frac{\sum I_p \cdot p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum \frac{p_t}{p_0} \cdot 100 \cdot p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_t q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot 100 = 120$$

$$\bar{I}_q = \frac{\sum I_q \cdot p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum \frac{q_t}{q_0} \cdot 100 \cdot p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum q_t p_0}{\sum q_0 p_0} \cdot 100 = 93$$

**(3 поена)**

Вредности пондерисаних групних индекса цена и физичког обима увоза по методу средњих вредности (пондер: вредност из базног периода) су једнаке вредностима групних индекса цена и физичког обима увоза из дела задатка под а), добијеним по методу агрегата (пондери из базног периода).

**(1 поен)**